

# Teme za dodatnu nastavu u osnovnoj školi

## 1 Šesti razred

### 1. Djeljivost.

**Zadatak:** Ako su  $a$  i  $b$  prosti brojevi veći od tri, dokaži da je broj  $(a + b)(a - b)$  djeljiv sa 12.

**Zadatak:** Da li postoje prosti brojevi  $p$  i  $q$  za koje je  $13p + 3q = 2022$ ?

### 2. Skupovi.

**Zadatak:** Dati su skupovi  $A, B$  i  $C$  takvi da je  $A \cap B \cap C = \emptyset$ . Ako je  $|A \setminus B| = 7$ ,  $|C \setminus B| = 8$ ,  $|A \cup B \cup C| = 20$  i  $|A \cap C| = 2$ , koliko elemenata ima u skupu  $B$ ?

**Zadatak:** Od 99 učenika 5. razreda koji su gledali projekciju filma njih 76 je kupilo sok, a njih 59 kokice. Devetina od ukupnog broja učenika nije kupila ni sok ni kokice. Izračunaj koliko je učenika kupilo sok a nije kokice.

**Zadatak:** Koliko ima cijelih brojeva koji nisu djeljivi ni sa 3 ni sa 5 ni sa 7, a čija je apsolutna vrijednost manja od 2022?

### 3. Razlomci.

**Zadatak:** Zbir dva broja i njihovog zbira je  $\frac{40}{21}$ . Odredi te brojeva ako je apsolutna vrijednost jednog broja četiri puta veća od apsolutne vrijednosti drugog.

**Zadatak:** Dokaži da je

$$\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2022} < \frac{1}{9}$$

### 4. Uglovi.

**Zadatak:** U trouglu  $ABC$  je  $\angle B = 80^\circ$ . Tačka  $D$  je na stranici  $BC$  tako da je  $\angle BDA = 70^\circ$  i još vrijedi  $AB + BD = AC$ . Koliki je  $\angle BAC$ .

**Zadatak:** Konveksni četvorouglovi  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  imaju podudarne odgovarajuće stranice. Ako je  $\angle A > \angle A'$ , uporedi ostale uglove ovih četvorouglova?

### 5. Procenti i proporcije.

**Zadatak:** U prodavnicu je stigla pošiljka olovaka. Četvrtina ih je prodana za 5% veću cijenu, a polovina za 10% manju od planirane. Kako treba prodati ostataka tako da se zaradi tačno planirana suma?

**Zadatak:** Koka i po za dan i po snese jaje i po. Koliko dana treba da bi 30 koka snijelo 8000 jaja?

---

6. **Simetrija.**

**Zadatak:** Tačke  $A$  i  $B$  su sa iste strane prave  $p$ . Odrediti tačku  $X$  na pravoj  $p$  tako da  $AX + XB$  bude minimalno.

**Zadatak:** Koliko osa simetrije ima kocka?

7. **Jednačine i nejednačine.**

**Zadatak:** Ana u kasicu ima 108 KM u kovanicama od 1, 2 i 5 KM. Vrijednost novca u kovanicama od 2 KM je jednaka vrijednosti novca u kovanicama od 5 KM, a polovina svih kovanica su one od 1 KM. Koliko ima kojih kovanica?

## 2 Sedmi razred

1. **Podudarnost trouglova.**

**Zadatak:** U trouglu  $ABC$  je  $BC = 2AC$ . Tačka  $D$  je na stranici  $BC$  takva da je  $\angle CAD \cong \angle ABC$ . Simetrala vanjskog ugla  $C$  siječe polpravu  $AD$  u  $E$ . Dokaži da je  $AB = AE$ . **Zadatak:** Neka su  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  visine oštroglog trougla  $ABC$ , a  $D$  i  $E$  tačke simetrične  $A'$  u odnosu na prave  $AB$  i  $AC$ , redom. Dokazati da su tačke  $B'$ ,  $C'$ ,  $D$  i  $E$  kolinearne.

**Zadatak:** Veličina jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta  $ABC$  iznosi  $30^\circ$ . Ako je tačka  $P$  polovište hipotenuze  $AB$ , a tačka  $S$  središte tom trokutu upisane kružnice, kolika je veličina kuta  $SPC$ ?

2. **Paralelogram.**

**Zadatak:** Neka je  $ABCD$  konveksan četvorougao i neka su  $P, Q, R, S$  polovišta stranica  $AB, BC, CD$  i  $DA$ . Tačka  $M$  je unutar četvorougla tako da je  $APMS$  paralelogram. Dokaži da je  $MQCR$  takođe paralelogram.

3. **Površina.**

**Zadatak:** Unutar pravokutnika  $ABCD$  nalazi se tačka  $T$ . Spoji li se tačka  $T$  s vrhovima pravokutnika, pravokutnik će biti podijeljen na četiri trokuta. Površine triju od tih trokuta su 15, 54 i 75. Odredi sve moguće površine pravokutnika  $ABCD$ .

4. **Cijeli brojevi.**

**Zadatak:** Izračunaj:

$$2022 - 2 \cdot 2022 + 3 \cdot 2022 - 4 \cdot 2022 + \dots + 2021 \cdot 2022 - 2022 \cdot 2022 =$$

5. **Izometrije i vektori.** **Zadatak:** Date su tri paralelne prave. Konstruiši jednakostranični trougao kojem su tjemena na tim pravim.

**Zadatak:** Tačka  $O$  je centar pravilnog 2021-tougla  $A_1A_2 \dots A_{2021}$ . Izračunaj

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2021}}.$$

---

### 3 Osmi razred

1. **Mnogouglovi.**

**Zadatak:** Odredi ugao između dijagonala  $AD$  i  $CG$  u pravilnom osmouglu  $ABCDEFGH$ .

2. **Realni brojevi.**

**Zadatak:** Odrediti sve realne brojeve  $a$  za koje su  $a + \sqrt{15}$  i  $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$  cijeli brojevi.

3. **Krug.**

**Zadatak:** Jednakostraničnom trouglu  $ABC$  opisana je kružnica. Manja kružnica u spoljašnjosti trougla dodiruje veću kružnicu iznutra i stranicu  $AB$ . Koliki je omjer površina manjeg i većeg kruga?

**Zadatak:** Tačka  $M$  je na luku  $\widehat{BC}$  kruga koji je opisan oko jednakostraničnog trougla  $ABC$ . Dokaži da je  $MA = MB + MC$ .

4. **Pitagorina teorema.**

**Zadatak:** Dat je trapez  $ABCD$  sa osnovicama  $AB = 5$  i  $CD = 3$ . Ako je  $AC$  normalno na  $BC$ , a  $BD$  je simetrala ugla  $B$ , odredi visinu trapeza!

5. **Stepeni i korijeni.**

**Zadatak:** Na tabli je Ana napisala broj  $2^{2022}$ , a Petar broj  $5^{2022}$ . Koliko se cifara nalazi na tabli?

**Zadatak:** Odrediti ostatak pri djeljenu

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}$$

sa brojem 9.

**Zadatak:** Da li je moguće brojeve  $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{n-1}, 3^n$  podijeliti u tri grupe tako da proizvod brojeva u svakoj grupi bude isti ako je  $n = 2022$ . A za  $n = 2023$ ?

6. **Algebarski izrazi**

**Zadatak:** Da li je

$$2013 \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 16$$

potpun kvadrat?

**Zadatak:** Ako je  $x + y = 1$ , a  $x^2 + y^2 = 2$  koliko je  $x^4 + y^4$ ?

**Zadatak:** Da li je broj  $9^{2022} + 3^{2022} + 1$  prost?

### 4 Deveti razred

1. **Linearna funkcija.**

**Zadatak:** Date su tačke  $A(0, 4)$  i  $B(-1, 5)$ . Na pravoj  $y = -x$  odredi tačku  $P$  tako da zbir dužina duži  $AP$  i  $BP$  bude minimalan.

---

2. **Sistem linearnih jednačina.**

**Zadatak:** Ana, Borna, Cvita i Davor izrađuju papirnate ždralove. Odlučili su napraviti 1000 ždralova. Ana i Borna su napravili 167 ždralova, a Borna i Cvita su napravili 181 ždrala. Ana je napravila 8 ždralova više od Davora. Trenutno im do zadanog broja ždralova nedostaje još 677 ždralova. Koliko ždralova je napravio svatko od njih?

**Zadatak:** Nađi sve trojke  $(x, y, z)$  realnih brojeva za koje je

$$x(y + z) = 10, \quad y(x + z) = 11, \quad z(x + y) = 17$$

3. **Stereometrija.**

**Zadatak:** Data je pravilna trostrana prizma  $ABCA'B'C'$ . Tačka  $D$  je na stranici  $AA'$ , tako da je  $AD : DA' = 4 : 1$ . Tačke  $E$  i  $F$  su osnosimetrične tačkama  $B'$  i  $C'$  obzirom na pravu  $BC$ . U kom odnosu ravan  $DEF$  dijeli zapreminu prizme?

## 5 Odabrane teme

1. **Invarijante.**

**Zadatak:** Da li kralj može krenuti iz donjeg lijevog ugla šahovske table, obići sva polja tačno jednom, i završiti u gornjem desnom uglu?

2. **Prebrojavanje.**

**Zadatak:** Na koliko načina se cifre od 0 do 9 mogu poredati u niz tako da 0 i 9 nisu susjedne?

**Zadatak:** Od deset različitih cvjetova treba napraviti buket sa bar dva cvijeta. Na koliko načina se to može uraditi?

**Zadatak:** Koliko ima deveteroznamenastih brojeva zapisanih pomoću devet različitih znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 takvih da je svaki troznamenasti broj koji formiraju tri uzastopne znamenke tog broja djeljiv sa 3?

3. **Logičke igre.**

**Zadatak:** U tri kutije nalaze se kuglice: u prvoj kutiji su 2, u drugoj kutiji 3, a u trećoj kutiji 4 kuglice. Dva igrača igraju sljedeću igru: naizmjenično uzimaju iz proizvoljne kutije proizvoljan broj kuglica. Pobjednik je onaj igrač poslije čijeg poteza sve kutije ostaju prazne. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

4. **Dirihleov princip.**

**Zadatak:** Da li se jednakostranični trougao može pokriti sa dva manja jednakostranična trougla?

**Zadatak:** Na tabli su napisana 24 različita prirodna broja, svi su manji od 51. Dokaži da postoje dva čiji je zbir djeljiv sa 7!

5. **Kongruencije.**

**Zadatak:** Šta je zadnja cifra broja  $777^{777}$ ?

**Zadatak:** Dokaži da je  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  djeljivo sa 7.

---

6. **Nejednakosti.**

**Zadatak:** Dati su pozitivni realni brojevi  $x, y, z$ . Kada je  $A = B$ ? Šta je veće:  $A = x^2 + y^2 + z^2$  ili  $B = xy + xz + yz$ ?

## 6 Za one koji vole izazove

1. Da li se u koordinatnoj ravni može nacrtati jednakostraničan trougao kojemu su koordinate svih tjemena racionalni brojevi?
2. Prava koja dijeli trougao na dva dijela jednakih obima i jednakih površina prolazi kroz jednu značajnu tačku trougla. Koju?
3. Neka je  $ABC$  oštrogli raznostranični trougao sa centrom upisane kružnice  $O$ . Tačka  $D$  je podnožje visine iz  $A$  na  $BC$ . Prave  $BC$  i  $AO$  se sijeku u tački  $E$ . Prava  $s$  prolazi kroz  $E$  i normalna je na  $AO$ . Ta prava  $s$  siječe  $AB$  i  $AC$  u  $K$  i  $L$ , tim redom. Neka je  $\omega$  opisana kružnica oko  $AKL$ . Prava  $AD$  siječe kružnicu  $\omega$  opet u  $X$ . Dokaži da se  $\omega$  i kružnice opisane oko  $ABC$  i  $DEX$  sijeku u jednoj tački.
4. Zadat je pravilan  $n$ -tougao  $A_1A_2 \dots A_n$ . Koliko ima tupouglih trouglova kojima su tjemena iz skupa  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ?
5. Na gredi dužine deset metara nalazi se 1000 mrava koji se svi kreću stalnom brzinom 1 metar u minuti. Kada se dva mrava susretnu, promijene smjer kretanja. Za koliko vremena će svi mravi sigurno pasti sa grede?
6. Mali poštar Pero živi u ulici u kojoj je  $n$  kuća, sve kuće su sa iste strane ulice i udaljenost između dvije susjedne kuće je 100 metara. Pero kreće od svoje kuće, treba da podijeli pozivnice za rođendan svima u ulici i da se vrati u svoju kuću. Kako želi da smrša htio bi da hoda što duže. Koliki put Pero najviše može da pređe?
7. Dato je  $2n$  različitih tačaka u ravni, među kojimanema kolinearnih. Od tih tačaka je  $n$  obojeno crvenom a  $n$  plavom bojom. Dokazati da se može povući  $n$  duži, svaka sa po jednim crvenim i jednim plavim krajem, tako da nikoje dvije nemaju zajedničkih tačaka.
8. U centru svakog kvadrata šahovske table se nalazi po jedna tačka. Da li je sa 13 pravih moguće podijeliti tablu tako da se različite tačke nalaze u različitim regionima?
9. Da li postoji prirodan broj koji ima neparan broj parnih djelitelja i paran broj neparnih djelitelja?
10. Odrediti realne brojeve  $a, b, c, d$  za koje je  $a + b + c + d = 20$ , i  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150$ .