Zadaci za seminar

Oznake:

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ je skup koji sadrži n najmanjih prirodnih brojeva.
$|X|$ je oznaka za broj elemenata skupa X.

1 Važni brojevi

- 2^n je broj podskupova skupa $[n]$; m^n je broj svih funkcija $f : [n] \Longrightarrow [m]$
- $n!$ je broj bijekcija $f : [n] \Longrightarrow [m]$; $\frac{n!}{k!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ je broj injekcija $f : [k] \Longrightarrow [n]$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, je broj k-članih podskupova skupa $[n]$;prevod sa engleskog za ovaj broj je "od n biram k"

2 Zadaci za zagrijavanje

1. Koliko ima svih n-tocifrenih prirodnih brojeva?
2. Koliko ima n-tocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 5? Koliko ima trocifrenih brojeva djeljivih sa 5 kojima su sve cifre različite?
3. Koliko ima osmocifrenih prirodnih brojeva kojima je prva cifra parna a posljednja neparna?
4. Koliko ima n-tocifrenih prirodnih brojeva u čijem se zapisu koristi bar jednom cifra 1?
5. Koliko ima dijagonala u konveksnom n-touglu?
6. Na koliko načina se 4 učenika mogu rasporediti u učionicu u kojoj ima 12 stolica?
7. Koliko se najviše nenapadajućih topova može postaviti na šahovsku tablu? Na koliko načina možemo postaviti te topove?
8. Koliko ima podskupova skupa [9] koji sadrže bar jednu neparnu cifru?
9. Na dvije paralelne prave Ana je nacrtala po deset tačaka. Koliko ima trouglova kojima su te tačke tjemena?

3 Nešto teži zadaci

1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji u decimalnom zapisu imaju bar dvije različite cifre?
2. Na svakoj stranici kvadrata je dato pet tačaka (različitih od tjemena tog kvadrata). nacrtani su svi trouglovi kojima su tjemena neke tri od tih 20 tačaka. Koliko je trouglova dobijeno?
3. Na koliko načina možemo postaviti kralja na šahovsku tablu, a zatim odigrati potez?
4. Koliko ima podskupova skupa $[2n]$ u kojima jednačina $x + y = 2n + 1$ nema rješenja?
5. Koliko ima permutacija skupa $[n]$ u kojima:
   (a) se broj 1 pojavi prije 2
   (b) brojevi 1 i 2 su jedan do drugog
   (c) između bilo koja dva neparna broja nema parnih
6. U konveksnom n-touglu su povučene sve dijagonale. Ako nikoje tri dijagonale ne prolaze kroz istu tačku, koliko ima presječnih tačaka tih dijagonala koje su unutar n-tougla?
7. Pravougaonik $m \times n$ je pravim podijeljen na jedinične kvadrate. Koliko se pravougaonika vidi na toj slici?
8. Koliko ima cjelobrojnih rješenja nejednačine $|x| + |y| \leqslant 2023$?
9. Na koliko načina možemo postaviti damu na "šahovsku tablu" $n \times n$, a zatim odigrati potez?

3.1 Bijekcija

1. Koliko ima najkraćih puteva od $(0, 0)$ do (m, n) u cjelobrojnoj mreži (iz tačke (p, q) se može doći u $(p + 1, q)$ ili u $(p, q + 1)$)?
2. Na koliko različitih načina n ljudi može da sjedne oko okruglugog stola? Dva rasporeda sjedenja su ista ako svaka osoba ima iste susjede (i lijevo i desno).
3. Pravougaonik $n \times 1$ je podjeljen na jedinične kvadrate. Na koliko načina se može doći od tačke $(0, 0)$ do tacke $(n, 1)$ ako se šeta po ivicama jediničnih kvadrata, i nijedna ivica se ne smije koristi dva puta?
4. Bacaju se tri različite kockice za jamb. Koliko ima ishoda kod kojih je zbir brojeva na svim kockicama veći od 10?
5. Koliko ima binarnih nizova dužine n koji imaju više jedinica nego nula?

4 Zadaci sa takmičenja

1. Ana je na kružnici nacrtala n tačaka i označila ih je sa brojevima od 1 do n. Povukla je sve duži kojima su krajevi tačke $1, 2, \ldots, n-1$, a tačku n je spojila sa nekoliko preostalih. Ako znamo da je Ana ukupno nacrtala 60 duži, sa koliko je tačaka spojila tačku n?

2. Ana ima crvene,bijele i plave žetone. Prvo je poredala sve bijele. Onda je izmedju svaka dva bijela postavila crveni. Na kraju je između svaka dva postavljena žetona postavila plavi. Ukupno je postavila 397 žetona. Koliko je bijelih žetona postavila?

3. Ana je napisala sve trocifrene brojeve. Za svaki broj je izračunala proizvod njegovih cifara. Nakon toga je sabrala sve dobijene brojeve. Koji je broj dobila na kraju?

4. Koliko ima tročlanih podskupova skupa [2023] u kojima je jedan element jednak zbiru druga dva?

5. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva kojima je zbir količnika i ostatka pri dijeljenju sa 100 djeljiv s 11?

6. Dvadeset koverata u obliku kvadrata različitih veličina treba spakovati u najveću od njih. Pri tome, svaka manja koverta se može (a i ne mora) ubaciti u neku veću, ali sve moraju biti u najvećoj. Na koliko načina je to moguće uraditi?

7. Koliko ima djelitelja broja 30^{30} koji završavaju sa tačno 15 nula?

8. Koliko ima 2011-tocifrenih prirodnih brojeva djeljivih sa 99 kojima je jedna cifra 2, dvije cifre su 3, a ostale su 1?

9. U hodniku je 2018 prekidača za 2018 sijalica koje su na početku ugašene. Prekidači su označeni redom brojevima od 1 do 2018. Svaki od 2018 učenika prođe hodnikom. Pri tome i-ti učenik pritisne svaki prekidač označen brojem koji je djeljiv sa i. Koliko je sijalica ostalo upaljeno kada su svi učenici prošli hodnikom?

10. Žaba sjedi u tački $(0, 0)$. Svake sekunde žaba skoči u jednu od susjedne četiri cjelobrojne tačke. Koliko ima tačaka u kojima žaba može da sjedi nakon 1001 sekundi?

5 Teži, teški i baš teški zadaci

1. Koliko ima načina da se $m \times n$ tabela popuni brojevima -1 ili 1 tako da proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni bude 1.

2. Zadat je pravilan n-tougao $A_1A_2 \ldots A_n$. Koliko ima tupouglih trouglova kojima su tjemena iz skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$?

3. Mali poštar Pero živi u ulici u kojoj je n kuća, sve kuće su sa iste strane ulice i udaljenost između dvije susjedne kuće je 100 metara. Pero kreće od svoje kuće, treba da podijeli pozivnice za rođendan svima u ulici i da

se vrati u svoju kuću. Kako želi da smrša htio bi da hoda što duže. Koliki put Pero najviše može da pređe?

4. Ako je $p_n(k)$ broj permutacija $f : [n] \to [n]$ koje imaju tačno k-fiksnih tačaka[1], izračunaj

$$1^2 p_n(1) + 2^2 p_n(2) + \cdots + k^2 p_n(k) + \cdots + n^2 p_n(n)$$

5. Koliko ima permutacija $f : [n] \to [n]$ za koje

$$|f(1) - 1| + |f(2) - 2| + \cdots + |f(n) - n|$$

ima maksimalnu vrijednost?

6. Sva polja šahovske table 8×8 je proizvoljno obojena sa dvije boje (crno-bijelo). Ana želi da postavi žeton u prvi red na bijelo polje, i da ga pomjerajući na susjedna bijela polja (susjedna polja dijele zajedničku ivicu) dovede do posljednjeg (osmog) reda. Da li ima više bojenja table za koja Ana može da ostvari cilj ili bojenja za koja nije moguće ostvariti ono što Ana želi?

7. Permutacija $a_1 a_2 \ldots a_{2n}$ skupa $[2n]$ je dobra ako postoje dva susjeda koji se razlikuju za tačno n, a ostale su loše. Da li ima više dobrih ili loših permutacija?

8. U jednosmjernoj ulici se nalazi parking za n automobila. Na parking sa n mjesta označenih brojevima od 1 do n, dolazi n automobila (jedan po jedan). Vozač i-tog automobila se želi parkirati na mjesto a_i. Ako je željeno mjesto slobodno, on se tu parkira, inače se parkira na prvo sljedeće slobodno mjesto sa većim brojem. Ukoliko su sva mjesta zauzeta, vozač odlazi na neki drugi parking. Koliko ima nizova želja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ za koje se sva vozila mogu parkirati?

[1]Fiksna tačka je $i \in [n]$ za koji je $f(i) = i$